

Problemas similares

Los siguientes problemas tienen unas resoluciones tan parecidas que en matemáticas se consideran el mismo problema cuando se estudian en general.

- ① ¿De cuántas maneras se pueden escribir las letras de la palabra **ESE**?
- ② ¿De cuántas maneras se pueden escribir las letras de la palabra **ASONANCIA**?

En los dos problemas consideramos un conjunto con cierto número de elementos (que llamaremos «n»), con uno o más elementos repetidos algún número de veces (que llamaremos «m₁», «m₂», «m₃», etc.) que hay que colocar de todas las maneras posibles.

En el problema (1), n=3, m₁=2 (la «E»); en el (2), n=9, m₁=3 (la «A»), m₂=2 («N»)

Permutaciones con repetición

Llamamos permutaciones con repetición de «n» elementos estando repetidos algunos de ellos «m₁», «m₂»,... veces a la cantidad de posibles ordenaciones de esos elementos. Se escribe $P_n^{m_1, m_2, \dots}$.

Fórmula de las permutaciones con repetición

Las permutaciones de «n» elementos estando repetidos algunos de ellos «m₁», «m₂», «m₃»,... veces es:

$$P_n^{m_1, m_2, \dots} = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots}$$

$$\text{Ejemplo 1: } P_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2!}{2!} = 3$$

$$\text{Ejemplo 2: } P_6^{3,2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$$

Idea de la demostración

Ilustramos la idea con el problema (1). La palabra **ESE** tiene tres letras, pero la «E» está repetida. Para razonar, imaginamos que podemos distinguir las dos «E» y para ello les ponemos subíndices: «E₁SE₂». Entonces las P₃ son:

E₁SE₂ (**ESE**) **E₁E₂S** (**EES**) **SE₁E₂** (**SEE**) **SE₂E₁** (**SEE**) **E₂SE₁** (**ESE**) **E₂E₁S** (**EES**)

Vemos que cuando intercambiamos las dos «E» se obtiene el mismo resultado (señalado con el mismo color), luego hay que dividir P₃ entre P₂.

Propiedad del factorial de un número natural

Cuando hay que dividir factoriales entre sí podemos utilizar esta propiedad para hacer simplificaciones y hacer operaciones que no podríamos hacer con la calculadora. Y la demostración es obvia.

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Ejemplo 3. Hemos utilizado esta propiedad en los cálculos anteriores.

$$\text{Ejemplo 4: } \frac{72!}{70!} = \frac{72 \cdot 71 \cdot 70!}{70!} = 72 \cdot 71 = 5112$$

Observa que 72! = 72·71! = 72·71·70! aplicando dos veces la propiedad.