

Estudio de si tres puntos están alineados

Se dice que tres puntos están alineados cuando existe una recta a la que pertenecen los tres.

El problema que se nos presenta es averiguar si tres puntos están alineados dadas las coordenadas de los tres.

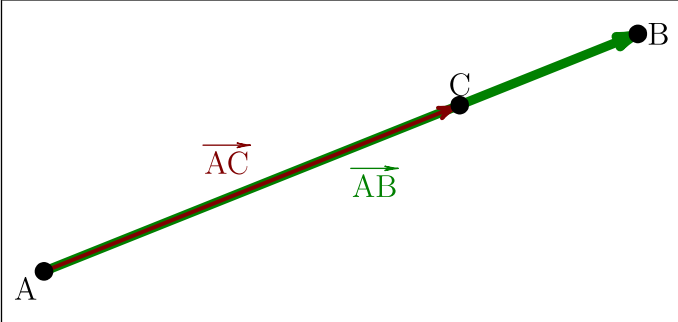
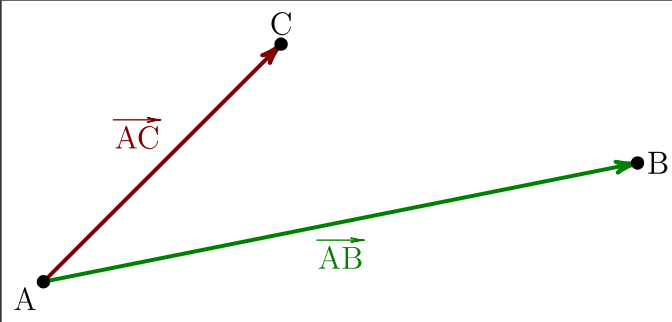
Como ya hemos visto en qué consisten las ecuaciones de las rectas, se nos puede ocurrir que para resolver el problema podemos usar esta técnica: se averigua una ecuación de la recta que pasa por dos de los puntos y se estudia si el tercer punto pertenece a esa recta.

Aún siendo un método correcto, hay una manera más sencilla de resolver el problema, recurriendo a propiedades de los vectores.

Método para determinar si tres puntos están alineados

Dados los puntos A, B y C, se verifica:

- * Si los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} son múltiplos, los tres puntos están alineados.
- * Si los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} no son múltiplos, los tres puntos no están alineados.

	
$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC} \Rightarrow$ puntos alineados	$\overrightarrow{AB} \neq \lambda \overrightarrow{AC} \Rightarrow$ puntos no alineados

Ejemplos

- ① Determina si los puntos $D = (-9, 32)$, $E = (1, 17)$ y $F = (7, 8)$ están alineados. Se puede tomar como punto base cualquiera de los tres, así que elegimos el que nos parece más sencillo:

$$\overrightarrow{FD} = (-9-7, 32-8) = (-16, 24) \text{ y } \overrightarrow{FE} = (1-7, 17-8) = (-6, 9).$$

Para determinar si estos dos vectores son múltiplos, calculamos los productos cruzados de sus componentes: $-16 \cdot 9 = -144$ y $24 \cdot (-6) = -144$.

Como los dos productos dan el mismo resultado, los dos vectores son múltiplos y por tanto los tres puntos están alineados.

Solución: están alineados.

- ② Determina si los puntos $K = (7, 14)$, $L = (-1, 3)$ y $M = (43, 58)$ están alineados.

$$\overrightarrow{LK} = (7-(-1), 14-3) = (8, 11) \text{ y } \overrightarrow{LM} = (43-(-1), 58-3) = (44, 55).$$

Calculamos los productos cruzados: $8 \cdot 55 = 440$ y $11 \cdot 44 = 484$.

Como los dos productos dan distinto resultado, los dos vectores no son múltiplos y por tanto los tres puntos no están alineados.

Solución: no están alineados.