

Ecuación implícita de la recta

Supongamos que una recta tiene ecuación continua $r \equiv \frac{x-h_1}{v_1} = \frac{y-h_2}{v_2}$

Si hacemos todas las operaciones necesarias para simplificar al máximo esta igualdad, llegaremos a otra igualdad que tendrá este aspecto: $ax+by+c = 0$, siendo «a», «b» y «c» tres números reales que habrá que determinar. Esta igualdad se llama **ecuación implícita** o **ecuación general** de la recta «r»: $r \equiv ax+by+c = 0$.

Ejemplo 1

Enunciado: averigua la ecuación implícita de la recta $s \equiv \frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{5}$

Resolución

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{5} \Rightarrow 5(x-2) = 4(y+3) \Rightarrow 5x-10 = 4y+12 \Rightarrow 5x-4y-22 = 0$$

Solución: $s \equiv 5x-4y-22 = 0$

Ejemplo 2

Enunciado: obtén dos puntos de la recta $t \equiv 2x+3y-8 = 0$ y el vector de dirección.

Resolución

Para obtener puntos de la recta hay que dar a «x» o a «y» un valor cualquiera y calcular el valor de la otra variable resolviendo la ecuación resultante. Lo que más nos interesa es dar un valor entero de modo que la otra variable también tenga un valor entero. No siempre se puede, y a veces es difícil, pero si se practica, se puede conseguir y eso nos ayuda con las operaciones.

$$y = 0 \Rightarrow 2x+3 \cdot 0-8 = 0 \Rightarrow x = 4 \rightarrow \text{punto A} = (4,0).$$

$$x = -5 \Rightarrow 2(-5)+3y-8 = 0 \Rightarrow y = 6 \rightarrow \text{punto B} = (-5,6).$$

El vector que une esos dos puntos será un vector de dirección:

$$\overrightarrow{AB} = (-5-4, 6-0) = (-9,6).$$

Pero se suele simplificar si es posible porque eso facilitará las operaciones que haya que hacer con él: $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}(-9,6) = (3,-2)$.

Solución: Puntos (4,0) y (-5,6), vector de dirección (3,-2).

Ejemplo 3

Enunciado: decide si los puntos $A = (-6,-2)$ y $B = (6,5)$ pertenecen a la recta $w \equiv 5x-8y+14 = 0$

Resolución

Sustituimos los puntos en la ecuación y comprobamos si se verifica la igualdad:

$$A = (-6,-2) \rightarrow 5(-6)-8(-2)+14 = -30+16+14 = 0 \checkmark \Rightarrow A \in w$$

$$B = (6,5) \rightarrow 5 \cdot 6-8 \cdot 5+14 = 30-40+14 = 4 \times \Rightarrow B \notin w$$